48th Annual Iranian MATHEMATICS Conference
Bu-Ali Sina University, August 22-25, 2017
Hamedan- Iran
چهل و هشتمین کنفرانس ریاضی ایران
۳۱ مرداد تا ۳ شهریور ۱۳۹۶
دانشگاه بوعلی سینا- همدان- ایران

یک حد بالا برای حداقل تعداد تطابقات درست در مسئله تطابق گراف با روش‌های مبتنی بر جستجوی تصادفی

هاشم عزتی [۱]
فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

محمود امین طوسی
استادیار، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

سید هاشم طبسی
استادیار، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

چکیده

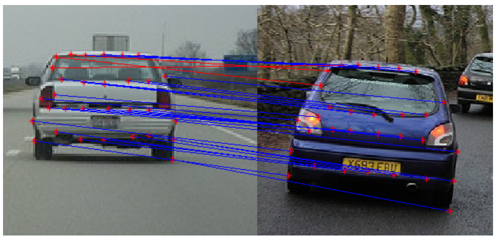
تطابق گراف از جمله معروف‌ترین مسائل گراف و ترکیبیات می‌باشد که به لحاظ ماهیت سخت آن، تحقیقات متعددی را به خود معطوف نموده است. گرچه الگوریتم‌های فراابتکاری عملکرد خوبی در بسیاری از مسائل NP-Hard و NP-Complete داشته‌اند، اما برای این مسئله نتایج معتبری از حل آن توسط این الگوریتم‌ها گزارش نشده است. تاکنون علت عدم کارایی این الگوریتم‌ها در مواجهه با این مسئله موردبررسی قرار نگرفته است. در این مقاله نشان داده می‌شود یک روش مبتنی بر جستجوی تصادفی با احتمال بسیار زیادی به جواب بهینه نزدیک نیز نخواهد شد. به عنوان نمونه نشان داده شده است در یک گراف با n رأس، احتمال آنکه به صورت تصادفی جایگشتی انتخاب شود و حداکثر سه تطابق درست حاصل شود، ۰/۰۲ درصد خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: تطابق گراف، الگوریتم‌های فراابتکاری، جایگشت

Mathematics Subject Classification [2010]: 05C60, 68R10

۱ مقدمه

تطابق گراف از موضوعات قدیمی مورد توجه در گراف و ترکیبیات می‌باشد که کاربردهای مختلفی منجمله در تطابق تصویر در بینایی ماشین دارد. [۳، ۲] اگر دو گراف هر یک با n رأس داشته باشیم، تعداد تمام حالات ممکن تطابق رئوس دو گراف $n!$ می‌باشد. حالات متعددی در تطابق دو گراف وجود دارند که در این نوشتار تطابق رئوس، در حالتی که تعداد رئوس برابر هستند مدنظر می‌باشد. مثالی از چنین حالتی، مسئله تطابق تصویر [۲] است. در مسائل تطابق اشیاء در دو تصویر، هر شیئ به منزله یک گراف درنظر گرفته می‌شود و در صورت تطابق موفقیت‌آمیز، اشیاء متعلق به یک کلاس محسوب می‌شوند. شکل ۱ یک زوج تصویر ماشین به همراه نقاط متناظر گراف آنها را نشان می‌دهد. خطوط قرمز نمایش دهنده تناظرات نادرست هستند. در این کاربرد، فقط یک تطابق رئوس درست درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۱: دو تصویر خودرو که تطابقات نادرست رئوس گراف با رنگ قرمز نشان داده شده است.

تعریف ۱.۱ (تطابق گراف). دو گراف G_1 و G_2 هر یک با n رأس مفروضند یک نگاشت یک به یک از رئوس گراف G_1 به رئوس گراف G_2 نشان دهنده یک تطابق بین دو گراف مذکور می باشد. [۴]

[۱] سخنران

[۲] Image Matching

تعریف ۲.۱ (یکریختی). دو گراف G_1 و G_2 یکریخت [۳] هستند اگر و فقط اگر وجود داشته باشد نگاشتی مانند $\phi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ به طوری که هر رأس گراف G_1 دقیقا متناظر یک رأس از گراف G_2 باشد. یا به عبارتی، x و y در گراف G_1 مجاور هم هستند اگر و فقط اگر $\phi(x)$ و $\phi(y)$ در گراف G_2 مجاور هم باشند. [۴]

این مسئله در حالت کلی یک مسئله انپی–سخت [۴] [۲] با مرتبه زمانی $O(n!)$ می‌باشد. یک جایگشت [۵] از اعداد از ۱ تا n یک نقطه در فضای جواب مسئله را نشان می‌دهد. در این نوشتار همانطور که از شکل ۱ برمی آید فقط یک جایگشت از $n!$ حالت ممکن، جواب درست می باشد. الگوریتم‌های فراابتکاری که مبتنی بر دو پایه جستجوی تصادفی و جستجوی محلی هستند در بسیاری از مسائل انپی–سخت و انپی–کامل مورد استفاده قرار گرفته و به نتایج مناسبی منجر شده‌اند. به عنوان نمونه این الگوریتم‌ها در مسائل فروشنده دوره‌گرد، N–وزیر، مکان‌یابی، رنگ‌آمیزی گراف، مسائل برش و بسته‌بندی کارایی خوبی داشته‌اند. [۴، ۱] تا آنجا که نگارندگان مطلع هستند، تاکنون گزارش معتبری از حصول به جواب درست مسئله تطابق گراف با روش‌های فراابتکاری ارائه نشده است. [۶] نبود گزارش معتبر و عدم موفقیت نگارندگان در استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری در حل این مسئله، همچون روش قدرتمند و مشهور شبیه‌سازی تبریدی، این حدس را در نگارندگان تقویت کرد که چه بسا ماهیت مسئله با این روش‌های حل سازگار نیست. مسئله‌ای همچون مسئله N–وزیر دارای جواب‌های فراوانی است که باعث می‌شود حصول به جواب دست یافتنی باشد. اما در مسئله تطابق گراف مورد بررسی در این نوشتار، فقط یک جواب درست، مورد قبول است. بررسی‌های مختلف نویسندگان حاکی از آن بود که تعداد تطابقات درست در روند تکراری الگوریتم، بسیار کم و در نتیجه مقدار تابع هدف نامناسب بود. اما در نقطه جواب، شاهد تغییری ناگهانی در مقدار تابع هدف هستیم. بررسی بیشتر نقش تابع هدف از جمله کارهای آتی نگارندگان خواهد بود. در این مقاله نشان خواهیم داد که با شروع از یک نقطه تصادفی در فضای جواب مسئله و اعمال عملگرهای تصادفی تولید همسایه، احتمال رسیدن به جواب بهینه نزدیک به صفر خواهد بود.

در بررسی نرخ خطای روش حل مسئله تطابق گراف، عموماً نرخ تطابقات نادرست محاسبه و گزارش می‌شوند. به عبارت دیگر تعداد رئوسی که در جایگاه درست خود قرار ندارند، شمارش می‌شوند. برای مثال جایگشت ۳, ۲, ۱, ۴ را با فرض اینکه هر عدد باید در جای درست خود از لحاظ شمارش قرار گیرد، در نظر بگیرید. در این جایگشت اعدد ۳ و ۱ در جای درست خود قرار ندارند و اعداد ۲ و ۴ در جای درست خود قرار گرفته اند.

در این نوشتار هدف اثبات این مسئله است که نسبت تعداد جواب‌های ممکن مسئله که حداقل m رأس به درستی طبقه‌بندی شده باشد به تعداد کل جواب های ممکن گراف، با افزایش m بسیار چشمگیر خواهد بود. در این راستا از الگوریتم شبیه سازی تبریدی برای حصول نتایج عملی استفاده شده است. با توجه به عدم وجود تابع هدف مناسب برای مسئله مذکور از جواب دانسته برای مقایسه نقاط مختلف در فضای جواب مسئله استفاده شده است. در بخش ۲ روش الگوریتم شبیه سازی تبریدی ذکر شده است. در بخش ۳ به اثبات قضایا و نتایج، در راستای هدف ذکر شده پرداخته شده است. و در نهایت در بخش ۴ به بیان نتایج بدست آمده از روش مذکور برای نشان دادن درستی نتایج بخش ۳ با گراف های مصنوعی تولید شده و جایگشت های تصادفی تولید شده، پرداخته شده است.

۲ روش های حل تطابق گراف

روش های مختلفی از جمله روش های عمومی، بهینه سازی، طیفی و تقریبی با استفاده از محاسبات نرم برای حل مسئله تطابق گراف وجود دارند، در این نوشتار روش های تقریبی که به اختصار روش های فراابتکاری نامیده می شوند انتخاب شده اند. الگوریتم های فراابتکاری بسیاری برای حل مسائل NP-Hard وجود دارند که از جمله آنها می توان به شبیه سازی تبریدی و جستجوی ممنوعه اشاره کرد. در این نوشتار الگوریتم شبیه سازی تبریدی انتخاب شده است که در ادامه توضیح مختصری از شیوه اجرای آن ذکر شده است.

۱.۲ الگوریتم شبیه سازی تبریدی

در الگوریتم شبیه سازی تبریدی، همانند سایر الگوریتم های فراابتکاری، درگام نخست نیاز به کد کردن راه حل های مختلف مسئله می باشد همانطور که ذکر شد هر جایگشت به عنوان یک راه حل در نظر گرفته می شود. در این روش ابتدا یک جایگشت (راه حل) تصادفی انتخاب و در هرگام به راه حلی در همسایگی(جا به جایی تصادفی دو عنصر) راه حل قبلی حرکت می شود. تفاوت این روش با روش های بهینه سازی محلی در این می باشد که در هر مرحله با احتمالی راه حل جدید پذیرفته یا رد می شود و این باعث می شود که از راه حل های بهینه محلی اجتناب شود.

[۳] Isomorphism
[۴] NP-Hard
[۵] Permutation
[۶] در مرجع [۴] نتایج نسبتا مناسبی از کاربرد الگوریتم ژنتیک در مسئله تطابق گراف داده شده است، اما فقط برای گراف‌های با تعداد رأس کم گزارش شده است. با این وجود مسئله با شرایط موجود در مرجع [۴] پیاده سازی شد اما نتایج خوبی بدست نیامد.

در بخش بعد قضایایی در راستای اثبات این موضوع که احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی حداقل سه عنصر جایگاه درست خود قرار گرفته باشند ۰٫۰۲ درصد است، آورده شده است.

۳ بررسی نسبت تعداد تطابقات درست در گراف هایی با n رأس

در این بخش ابتدا به قضیه ای که نشان دهنده تعداد تطابقات نادرست در یک جایگشت تصادفی می باشد، پرداخته شده است و در نهایت نتیجه ای که نشان دهنده احتمال جایگیری درست حداقل سه عنصر در یک جایگشت تصادفی می باشد، بیان شده است.

قضیه ۱.۳. *تعداد جایگشت‌هایی از $1, 2, \ldots, n$ که هیچ یک از اعداد در جایگاه درست خود قرار نگرفته باشند برابر است با [۵] :*

$$y(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ (n-1) \times (y(n-1) + y(n-2)) & n > 2 \end{cases} \tag{1}$$

قضیه ۲.۳. *تعداد جایگشت هایی از $1, 2, \ldots, n$ که دقیقا $m < n$ عدد در جای درست خود قرار بگیرند،* $C_m = \binom{n}{m} y(n-m)$ *می باشد.*

اثبات. قرارگرفتن m عدد در جایگاه درست به منزله انتخاب m شیئ از n شیئ (که ترتیب مهم نیست)، می باشد. این تعداد برابر است با، $\binom{n}{m}$ حال باید تعداد جایگشت هایی از $n-m$ عدد باقی مانده را یافت که هیچ عددی در جای درست خود قرار نگیرد، با کمک قضیه ۱.۳ واضح است که این تعداد برابر است با، y(n−m) با استفاده از اصل ضرب خواهیم داشت: $C_m = \binom{n}{m} y(n-m)$

□

رابطه ۱ را می‌توان بر حسب تابع Γ به صورت زیر نوشت [۶]:

$$y(n) = \Gamma(n+1, -1)\, \mathrm{e}^{-1} \tag{2}$$

که در آن :

$$\Gamma(s, x) = (s-1)!\, e^{-x} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{x^k}{k!} \tag{3}$$

در ادامه احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی دقیقا $m = 0, 1, \ldots, n-1$ عنصر در جایگاه درست قرارگرفته باشند را با p_m نشان میدهیم.

قضیه ۳.۳. *احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی n عنصری، صفر عنصر در جایگاه درست خود قرارگرفته باشد (به عبارت دیگر هیچ عنصری در جایگاه درست خود قرار نگرفته باشد)،* $p_0 = e^{-1} = 0/3679$ *می باشد.*

اثبات. با استفاده از رابطه ۳ و جایگذاری $n+1$ و -1 به ترتیب به جای s و x داریم:

$$\Gamma(n+1, -1) = n!\, e^{1} \sum_{k=0}^{n} \frac{-1^k}{k!}$$

میتوان رابطه ۲ را به صورت $y(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{-1^k}{k!}$ بازنویسی کرد. با ساده سازی آن داریم: $\frac{y(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-1^k}{k!}$ و با توجه به این که $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ در نتیجه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1^k}{k!} = e^{-1} = 0/3679$$

□

قضیه ۴.۳. *احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی n عنصری دقیقا $m < n$ عنصر در جایگاه درست خود قرارگرفته باشند $p_m = \frac{e^{-1}}{m!}$ می باشد.*

اثبات. با استفاده از قضیه ۲.۳ و ۳.۳ داریم:

$$p_m = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{m} y(n-m)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \times y(n-m)}{n! \times m! \times (n-m)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{y(n-m)}{m! \times (n-m)!} = \frac{e^{-1}}{m!}$$

□

قضیه ۵.۳. *احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی n عنصری حداقل m عنصر در جایگاه درست خود قرارگرفته باشند برابر است با:*

$$p_{1:m} = ۱ - (e^{-1} + \frac{e^{-1}}{۱!} + \frac{e^{-1}}{۲!} + \ldots + \frac{e^{-1}}{m!}) \tag{۴}$$

اثبات. ابتدا باید مجموع تمام احتمال هایی را که در آنها، در یک جایگشت تصادفی هیچ عنصری در جایگاه درست قرار نداشته باشد، دقیقا یک عنصر در جایگاه درست خود قرار داشته باشد، به همین صورت تمام احتمال هایی را که در آن ها دقیقا $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, m$ عنصر در جایگاه درست خود قرار داشته باشد را محاسبه کرده و با به کارگیری احتمال مکمل خواهیم داشت:

$$p_{1:m} = ۱ - (p_۰ + p_۱ + \ldots + p_m)$$

به کمک قضیه ۴.۳ و ۵.۳ داریم:

$$p_{1:m} = ۱ - (e^{-1} + \frac{e^{-1}}{۱!} + \frac{e^{-1}}{۲!} + \ldots + \frac{e^{-1}}{m!})$$

□

نتیجه ۶.۳. *احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی n عنصری حداقل ۳ عنصر در جایگاه درست خود باشند، ۰٫۰۲ درصد است.*
با استفاده از قضیه ۵.۳ خواهیم داشت:

$$p_{1:m} = ۱ - (e^{-1} + \frac{e^{-1}}{۱!} + \frac{e^{-1}}{۲!} + \frac{e^{-1}}{۳!}) = ۱ - (e^{-1} \times (۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!})) = ۱ - (e^{-1} \times (۲٫۶۶۶۶)) \approx ۰٫۰۲$$

در بخش بعدی علاوه بر نشان دادن نتایج عملی بدست آمده از قضایای این بخش بر روی جایگشت های تصادفی، نشان داده شده است که حل مسئله تطابق گراف با الگوریتم شبیه سازی تبریدی بر روی جفت گراف های مصنوعی تولید شده، منجر به جواب نهایی بهینه نمی شود.

۴ آزمایشات

آزمایشات انجام شده در این بخش به دو قسمت تقسیم شده اند که درستی نتیجه ۶.۳ را تایید می‌کنند. در قسمت اول به کمک تعدادی جایگشت تصادفی و مقایسه تعداد تطابقات درست و در قسمت دوم با ساخت گراف های مصنوعی، که از مرجع [۳] اقتباس شده اند، زوج گراف‌هایی با $n = ۲۰, ۵۰, ۱۰۰, ۳۰۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰$ رأس با جواب دانسته تولید شده و الگوریتم شبیه‌سازی تبریدی برای حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته است.

۱.۴ نتایج بدست آمده از جایگشت های تصادفی

در این زیربخش به کمک جدول ۱ به درستی نتیجه ۶.۳ پرداخته شده است. همچنین در جدول مذکور از صد هزار جایگشت تصادفی n عنصری به صورت $۱, ۲, ۳, \ldots, n$ برای هر ردیف استفاده شده است که $n = ۲۰, ۵۰, ۱۰۰, ۳۰۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰, ۱۰۰۰۰$ می باشد و همچنین در جایگشتهای تصادفی تولید شده، هر عددی که در مکان مناسب خود از لحاظ شمارش قرار گرفته باشد، یک تطابق درست در آن جایگشت فرض شده است. در ستون سوم تعداد جایگشت هایی از کل جایگشت ها که در آنها حداقل سه عنصر در جایگاه درست خود قرار گرفته است، نشان داده شده است. ستون چهارم، نسبت ستون سوم به ستون دوم را نشان می دهد.

تعداد رئوس	تعداد جایگشتها	تعداد جایگشتها با درستی حداقل ۳ عنصر	احتمال تعداد جایگشتها با درستی حداقل ۳ عنصر
۲۰	۱۰۰۰۰۰	۱۸۲۷	۰٫۰۱۸۳
۵۰	۱۰۰۰۰۰	۱۸۵۶	۰٫۰۱۸۶
۱۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۸۷۴	۰٫۰۱۸۷
۳۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۹۴۳	۰٫۰۱۹۴
۵۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۸۷۲	۰٫۰۱۸۷
۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۹۳۹	۰٫۰۱۹۳
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	۱۸۶۲	۰٫۰۱۸۶

جدول ۱: احتمال اینکه در یک جایگشت تصادفی حداقل ۳ عنصر در مکان مناسب خود باشند، در این جدول، صد هزار جایگشت تصادفی با اندازه های مختلف استفاده شده است.

تعداد رئوس	تعداد تکرار	احتمال درستی حداقل ۳ راس در تکرار اول	احتمال درستی حداقل ۳ راس در تکرار پنجاهم
۲۰	۲۰	۰٫۰۵	۰٫۴۰
۵۰	۵۰	۰٫۰	۰٫۱۶
۱۰۰	۱۰۰	۰٫۰۱	۰٫۰۲
۳۰۰	۳۰۰	۰٫۰۲	۰٫۰۴
۵۰۰	۵۰۰	۰٫۰۱۸	۰٫۰۲۴
۱۰۰۰	۱۰۰۰	۰٫۰۱۳	۰٫۰۱۹
۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۰٫۰۲	۰٫۰۲

جدول ۲: نتایج درستی نتیجه ۶.۳ با الگوریتم شبیه سازی تبریدی. همانطورکه ملاحظه می شود هر چه تعداد رئوس بیشتر می شود نتایج بدست آمده دقیقتر می باشند.

۲.۴ نتایج الگوریتم شبیه سازی تبریدی

در جدول ۲ خلاصه نتایج اجرای الگوریتم شبیه سازی تبریدی نشان داده شده است. ستون اول نشان دهنده تعداد رئوس هر جفت گراف، ستون دوم تعداد اجرای الگوریتم فوق برای هر جفت گراف، و ستون های سوم و چهارم نشان دهنده احتمال درستی حداقل سه رأس در تکرار اول و پنجاهم می باشند. همچنین در هر بار اجرای الگوریتم مذکور تعداد تکرار آن ۵۰ در نظر گرفته شده است. با توجه به این که نتایج حاصل از بخش ۲ در حالتی بود که n به سمت بینهایت میل می کرد، در جدول ۲ ملاحظه می شود، هر چه تعداد رئوس بیشتر می شود درستی نتیجه ۶.۳ نمایانتر است.

۵ جمع بندی

در این نوشتار، یک حد بالا برای حداقل تعداد تطابقات درست در مسئله تطابق گراف ارائه شد. همچنین نتایج تئوری بدست آمده با استفاده از روش های تصادفی و فرا ابتکاری مورد آزمایش قرار گرفته و صحت بررسی های تئوری نشان داده شد. همانطور که در مقدمه ذکر شد به علت عدم وجود تابع هدف مناسب برای مسئله تطابق گراف، در تابع هدف الگوریتم شبیه سازی تبریدی از جواب واقعی دانسته استفاده شده که این در عمل شدنی نیست، لذا نتایج بدست آمده ایده آل ترین نتایج هستند. همچنین با افزایش تعداد رئوس، نتایج دقیقتری حاصل می شد که با توجه به زمانبر بودن اجرای الگوریتم از این کار صرفه نظر شد. تولید تابع هدف مناسب برای الگوریتم های فراابتکاری در آینده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مراجع

[1] J. E. A. Heris and M. A. Oskoei, *Modified genetic algorithm for solving n-queens problem*, in 2014 Iranian Conference on Intelligent Systems (ICIS), pp.1–5, Feb 2014.

[2] J. Yan, X.-C. Yin, W. Lin, C. Deng, H. Zha, and X. Yang, *A short survey of recent advances in graph matching*,in Proceedings of the 2016 ACM on International Conference on Multimedia Retrieval, ICMR '16, (New York, NY, USA), pp.167–174, ACM, 2016.

[3] S. Kpodjedo, P. Galinier, and G. Antoniol, *Enhancing a tabu algorithm for approximate graph matching by using similarity measures*, in Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization, 10th European Conference, EvoCOP 2010, Istanbul, Turkey, April 7-9, 2010. Proceedings, pp.119–130, 2010.

[4] V. M. Shettar, *An exploration of algorithmic and theoretical approaches to graph matching and its applications*,Master's thesis, Karnatak University, 22-Aug- 2014.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement, ,2016.

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete-gammafunction, , 2016.

پست الکترونیکی: hashemezati1371@gmail.com
پست الکترونیکی: m.amintoosi@hsu.ac.ir
پست الکترونیکی: tabasi@du.ac.ir